

آچار ریاضی

۱۰۰ راه هوشمندانه برای کمک به فهم و
به یاد سپردن مهم ترین نظریه ها

ریچارد کاکرن

ترجمه‌ی

تورج حوری

زمنیات ماریار

فهرست مطالب

۹	مقدمه: چرا آچار ریاضی؟
	ترفندهای زیرکانه
۱۳	۱. اصل موضوع، قضیه، اثبات
۱۶	۲. استقراء
۱۹	۳. برهان خُلف
۲۲	۴. حدها
۲۵	۵. منطق
۲۸	۶. قضیه‌های ناتمامیت گودل
۳۰	۷. نظریه‌ی مجموعه‌ها
۳۲	۸. حاصل ضرب‌ها
۳۴	۹. نگاشت‌ها
۳۶	۱۰. هم‌ارزی
۳۸	۱۱. وارون‌ها
۴۰	۱۲. قضیه‌ی شرودر-برنشتاین
۴۲	۱۳. رده‌ها (Categories)

اعداد بی‌شمار

۴۴	۱۴. اعداد طبیعی
۴۶	۱۵. حدس کولاتز
۴۹	۱۶. هتل هیلبرت
۵۱	۱۷. اعداد اول
۵۳	۱۸. حدس دوقلوهای اول
۵۵	۱۹. حدس گلدباخ
۵۸	۲۰. اعداد منفی
۶۰	۲۱. اعداد گویا
۶۲	۲۲. توان‌ها
۶۵	۲۳. چندجمله‌ای‌ها

۶۷	۲۴. لگاریتم‌ها
۶۹	۲۵. اعداد ناگویا (گنگ)
۷۱	۲۶. اعداد حقیقی
۷۴	۲۷. استدلال قطری کردن کانتور
۷۷	۲۸. کاردینال‌های نامتناهی
۸۰	۲۹. فرضیه‌ی پیوستار
۸۲	۳۰. اعداد متعالی
۸۴	۳۱. عدد پی
۸۶	۳۲. اعداد مختلط
۸۹	۳۳. اعداد مختلط
۹۱	۳۴. کوآترنیون‌ها

علم ساختار

۹۴	۳۵. جبر مجرد
۹۶	۳۶. عمل‌های دودویی
۹۸	۳۷. انجمنی، جابه‌جایی، توزیع پذیری
۱۰۰	۳۸. گروه‌ها
۱۰۲	۳۹. الگوهای زینتی و کاغذ دیواری
۱۰۴	۴۰. گروه‌های ساده‌ی محدود
۱۰۶	۴۱. گروه‌های لی
۱۰۹	۴۲. حلقه‌ها و میدان‌ها
۱۱۲	۴۳. نظریه‌ی گالوا
۱۱۵	۴۴. معادلات دیوفانتی
۱۱۸	۴۵. قضیه‌ی آخر فرما
۱۲۱	۴۶. درجه‌ی پنچ غیرقابل حل
۱۲۴	۴۷. فرضیه‌ی ریمان
۱۲۶	۴۸. نظریه‌ی ترتیب
۱۲۹	۴۹. جبر همولوژیک

پیوستگی

۱۳۱	۵۰. مشتق
-----	----------

۱۳۳	۵۱. سری‌های تایلور
۱۳۵	۵۲. انتگرال
۱۳۷	۵۳. قضیه‌ی بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال
۱۳۹	۵۴. توابع آسیب‌شناختی (پاتولوژیک)
۱۴۱	۵۵. معادلات دیفرانسیل
۱۴۲	۵۶. حساب تغییرات
۱۴۵	۵۷. بردارها
۱۴۷	۵۸. واگرایی (دیورژانس) و تاو (کِرل)
۱۴۹	۵۹. فضاهاى اقلیدسى
۱۵۱	۶۰. چندگوناها (بِسلاها)
۱۵۲	۶۱. ضرب تانسوری
۱۵۵	۶۲. هم‌وردا و پاد‌وردا
۱۵۷	۶۳. ماتریس‌ها
۱۵۹	۶۴. بردارهای دوگان
۱۶۱	۶۵. میدان‌های تانسوری
۱۶۲	۶۶. سطوح کمینه
۱۶۵	۶۷. نظریه‌ی نمایش

ریاضیات در فضا

۱۶۷	۶۸. خطوط موازی
۱۶۹	۶۹. سازه‌های غیرممکن
۱۷۱	۷۰. توپولوژی
۱۷۲	۷۱. مثلث‌بندی
۱۷۵	۷۲. مشخصه‌ی اویلر
۱۷۷	۷۳. مسئله‌ی روشنایی
۱۷۹	۷۴. فضاهاى متریک
۱۸۱	۲۱. انحنا (خمش)
۱۸۳	۷۶. ابعاد
۱۸۵	۷۷. ابعاد کسری
۱۸۷	۷۸. هندسه‌ی کروی
۱۸۹	۷۹. هندسه‌ی هذلولوی
۱۹۱	۸۰. کاشی‌کاری‌های منظم

۱۹۳	۸۱. قضیه‌ی هندسی کردن تارستون
۱۹۵	۸۲. هندسه‌ی تصویری
۱۹۷	۸۳. تسراکت
۱۹۹	۸۴. توپولوژی جبری
۲۰۱	۸۵. نظریه‌ی گره
۲۰۳	۸۶. حدس پوانکاره
۲۰۵	۸۷. وارپته‌ها (گونه‌ها)
۲۰۷	۸۸. قضیه‌ی صفرهای هیلبرت

پیوند ریاضیات با واقعیت

۲۰۹	۸۹. تکرار
۲۱۱	۹۰. قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت بروئر
۲۱۳	۹۱. نظریه‌ی آشوب
۲۱۵	۹۲. فاکتوریل‌ها
۲۱۷	۹۳. ترکیبیات
۲۱۹	۹۴. گراف‌ها
۲۲۱	۹۵. احتمال
۲۲۳	۹۶. آمار
۲۲۵	۹۷. حرکت براونی
۲۲۷	۹۸. نظریه‌ی بازی
۲۲۹	۹۹. قابلیت محاسبه
۲۳۱	۱۰۰. P در برابر NP

مقدمه

چرا آچار ریاضی؟

داستانی باستانی با این مضمون وجود دارد: بطلمیوس اول، پادشاه مصر، هندسه‌دان مشهور، اقلیدس را به عنوان معلم خصوصی استخدام کرد اما خیلی زود از دشواری و زمان بر بودن پیشرفت در موضوع شاکی شد. او یقیناً این موضوع را با معلم خود در میان گذاشت که آیا راه سریع‌تری وجود ندارد؟ میان‌بری؟، اشاره‌ای شاید؟ اقلیدس با قاطعیت پاسخ داد «راه شاهانه‌ای برای هندسه وجود ندارد.»

اگر کاملاً هم اینگونه نبوده باشد، از آن به بعد، گفتگوهایی از این دست مطمئناً به دفعات بی‌شمار تکرار شده‌اند. جواب اقلیدس در کل درست است و منحصر به ریاضیات نیست. بسیاری از هنرآموزان موسیقی از تکرار ساعت‌های بی‌پایان اجرای گام‌ها شکایت کرده‌اند. ورزشکاران نیز برای پیشرفت نارضایتی‌های مشابهی داشته‌اند. آموختن دشوار است — اگر نبود همه آن را انجام می‌دادند.

شاید میان‌بر شاهانه‌ای وجود نداشته باشد، اما اگر قصد سفر جاده‌ای به سرزمین ریاضیات دارید برای مهیا شدن راه‌های خوب و بد وجود دارند. یکی از چیزهایی که احتمالاً باید داشته باشید، نقشه‌ای از چشم‌اندازهایی که می‌خواهید ببینید و نحوه‌ی رفتن از یکی به دیگری است.

این کتاب در درجه‌ی اول چنین چیزی است. یک راهنمای توریستی برای ریاضیات. اندازه و محدوده‌ی موضوع، برای بازدیدکننده‌ای که احتمال گم‌شدنش وجود دارد، می‌تواند ترسناک باشد، مخصوصاً برای آن‌ها که به زبان‌های بومی آشنایی ندارند. مانند همه‌ی کتاب‌های راهنمای خوب، اهمیت این کتاب به عنوان راهنمای هم‌زمان زبان دوچندان می‌شود و یک دیدگاه مستبدانه، هدفدار و شخصی را ارائه می‌کند. اگر تصویری کاملاً عینی امکان‌پذیر باشد، که من شک دارم، آن را اینجا نخواهید یافت.

این کتاب حاوی نقشه‌ی یک سرزمین نیست و خواندن آن از شما یک ریاضیدان نمی‌سازد. اما احساسی از اینکه ریاضیات چیست و چه چیزهایی را مطالعه می‌کند به شما می‌دهد. مطالب کتاب به احتمال قریب به یقین از تجاربی که در مدرسه داشته‌اید فراتر می‌رود، جایی که شما مشابه کارهایی مانند حفظ کردن طول رودخانه‌ها و نام پایتخت کشورها را انجام می‌دادید، یک کار کتابی پیش پا افتاده و پرزحمت. ریاضیات واقعی بیشتر درباره سفر است تا مقصد (البته کسی به مقصد

نهایی نمی‌رسد، همه دانشجو هستند و مسافر) وقتی از شهری دیدن می‌کنید دانستن اینکه کلیسای جامع شهر چه زمانی و به دست چه کسی ساخته شده جالب است به شرطی که هنوز سرپا باشد. دانستن کارکرد مترو و مکان هتل‌های خوب هم اهمیت دارد. بنابراین هرچند این کتاب موضوعات تاریخی هم دارد اما در اصل راهنمایی برای زمینه‌های ریاضی امروزی است. سعی کرده‌ام تمام روندهای عمده‌ی ریاضیات محض کنونی و تعدادی از نتایج مهم و هیجان‌انگیز قرن گذشته را در کتاب بگنجانم. این گاهی به معنای پوشش دادن موضوعاتی است که ذاتاً پیشرفته و نیازمند آماده‌سازی‌هایی بیش از آن هستند که به‌طور منطقی از این کتاب بر می‌آید. برای نمونه، این کتاب واقعاً نمی‌تواند به شما جبر همولوژیک بیاموزد اما می‌تواند به شما بگوید چنین چیزی هست و تقریباً در کجای نقشه می‌توانید آن را پیدا کنید. این موضوعات مانند کوه‌ها هستند: برای بالا رفتن از آن‌ها به چیزی بیش از یک نقشه‌ی راهنما نیاز دارید. اینجا شما کشف خواهید کرد که آن‌ها کجا هستند و اشاره‌ای خواهید گرفت از اینکه چرا روزی باید تصور رفتن به آنجا را داشته باشید.

بخش‌های کتاب

با «ترندهای زیرکانه» شروع می‌کنیم: ایده‌ها و فنونی که تمام ریاضیات را فراگرفته است. بخش دوم درباره‌ی «اعداد بی‌شمار» است، چیزهایی که بیشتر مردم تصور می‌کنند کل ریاضیات درباره‌ی آن است. خود ایده‌ی عدد در دو قرن گذشته عمیقاً مورد بازبینی قرار گرفته است. در واقع ریاضیات درباره‌ی چیزی خیلی بیشتر از اعداد است. یک دیدگاه باورپذیر این است که ریاضیات، علم ساختار است که در بخش ۳ به آن خواهیم پرداخت.

بخش‌های ۴ و ۵ روندی متفاوت اما کاملاً مرتبط در پیش می‌گیرند: از یک دیدگاه وسیع، یعنی ریاضیات به عنوان مطالعه‌ی فضا و زمان. در بحث پیوستگی به حساب دیفرانسیل و انتگرال نگاه می‌کنیم، خانواده‌ای از فنون لازم برای مطالعه‌ی فرایندهای تغییر و دیگر پدیده‌های پیوسته که از زمان اختراع آن توسط نیوتون و لایب‌نیتس، تعمیم وسیعی را تجربه کرده است.

در «ریاضیات در فضا» مشاهده می‌کنیم که چگونه هندسه وارد زمینه‌ای غنی از انبوهی از اشیاء عجیب و مرموز می‌شود. از توصیف چیزهایی مانند نوار موبیوس که تقریباً در هر کتاب عامه فهم ریاضی وجود دارد، خودداری کرده‌ام؛ در این مرحله با آشنا شدن با توپولوژی و هندسه‌های ریمانی و جبری، تا حدودی ژرفاندیش‌تر

می‌شویم.

نهایتاً در بخش «مواجه شدن ریاضیات با واقعیت» سعی می‌کنم مابین حوزه‌هایی از ریاضیات که عمدتاً وارد کاربردهای عملی شده‌اند عدالت برقرار کنم، به ویژه مابین آمار، الگوریتم‌ها، تصمیم‌گیری و مدل‌سازی. به این‌ها از نقطه‌نظر ریاضی نگاه می‌کنم نه تنها علمی.

طرح‌ها

هدف هر یک از ۱۰۰ قسمت کتاب، ارائه‌ی احساسی کلی و شهودی از موضوع به شما است. هر قسمت، موضوع را به طریقه‌های گوناگون مطرح می‌کند با این امید که یکی برای شما موثر واقع شود. نگاه هلیکوپتری، متنی را برای ایده و شاید مسئله‌ای انگیزه بخش را به عنوان مثال، فراهم می‌کند. میان‌بُر به دادن جزئیاتی مشخص تمایل دارد — گاهی این ماجراجویی را می‌کنم که چیزی را که یک ریاضیدان آن را «تعریف» می‌نامد ارائه کنم، اما مقصود همان است. اما گاهی موضوع مورد بررسی، تقسیم وظایف متفاوتی مابین این زیر قسمت‌ها را طلب می‌کند. اشاره‌ی پایانی در هر قسمت، دو راه مختصر و متفاوت برای یادآوری ایده به شما می‌دهد. در مواردی که نیاز به یاد آوری سریع دارید، آن‌ها می‌توانند تلنگری به حافظه‌ی شما بزنند. نگهداری سراسر همه چیز در ذهن مخصوصاً برای بار اول سخت است، بنابراین چنین چیزهایی می‌توانند مفیدتر از آن باشند که انتظار دارید.

دو جنبه‌ی خیلی مهم کتاب، نمایه و مراجع مشترک است. ریاضیات موضوعی درهم‌بافته با ارتباطات داخلی است: هیچ بخشی کاملاً از بخش‌های دیگر جدا نیست. برای آموختن مطلبی جدید، پس و پیش رفتن روی موضوعات مختلف کاملاً طبیعی است. هر چه بیشتر بیاموزید این کار آسان‌تر می‌شود، هرچند هرگز آسان نمی‌شود و جذابیت کار همین جاست.

اصل موضوع، قضیه، اثبات

سبک مینیمالیستی ریاضیدانان



اقلیدس (ح ۲۸۳-۳۲۳ ق.م)

✱ **۱/ نگاه هلیکوپتری:** اقلیدس کتاب بزرگ اصول خود را سیصد سال قبل از میلاد نوشت. این کتاب مجموعه‌ای از حقایق ریاضی و عمدتاً هندسی است که به یکی از پرخواننده‌ترین کتاب‌های همه‌ی زمان‌ها تبدیل شده است. کتاب اقلیدس به لحاظ شکل و محتوا فوق‌العاده است. تقریباً همه چیز در این کتاب به یکی از سه مبحث اصلی تعلق دارد. امروزه این‌ها را معمولاً اصول موضوعه، قضایا و اثبات‌ها می‌نامند. آن‌ها روشن می‌کنند که در آغاز چه چیزی باید فرض شود، چه چیزی با این مفروضات قابل اثبات‌اند و برای بدست آوردن نتایج،

چه روش‌هایی به کار می‌روند.

رهیافت اقلیدس از آن هنگام توسط نویسندگان ریاضیات، به ویژه برای متون فنی، نسخه‌برداری و جرح و تعدیل شده است. به خصوص در قرن بیستم نسخه‌ی بسیار خلاصه شده‌ای پدید آمد که اکنون یک متن استاندارد به شمار می‌رود. امروزه شکلی از سبک اصل موضوع، قضیه، اثبات، در همه چیز، از کتاب‌های درسی گرفته تا مقالات تحقیقاتی، به یک هنجار تبدیل شده است.


تحقیق در ریاضیات اغلب شامل اثبات قضیه‌های جدید از مجموعه‌ای از اصول موضوعه‌ی موجود است؛ گاهی هم ریاضیدانان مجموعه‌هایی از اصول موضوعه را اختراع می‌کنند که تماماً جدید هستند.



صفحاتی از ویرایش‌های گوناگون اصول اقلیدس، تأثیرگذارترین کتاب ریاضی که تا کنون نوشته شده است.

۲/ میان‌بر: نظریه‌ی ریاضی مجموعه‌ای از فرضیات است. اصول موضوع – که غالباً «تعاریف» نیز نامیده می‌شوند – همان مفروضات آغازین هستند. آن‌ها نظریه‌ی خاصی را که روی آن کار می‌کنید مشخص می‌کنند.

اگر بتوانید با استدلال به نتیجه‌ای برسید که قبلاً به‌طور صریح در اصول موضوع نبوده، این نتیجه‌گیری یک قضیه نامیده می‌شود و استدلال مورد استفاده برای رسیدن به نتیجه همان اثبات است. بازبینی یک اثبات این اجازه را به هر کسی می‌دهد تا تحقیق کند که اگر اصول موضوع حقیقت‌اند، قضیه‌ی شما نیز باید این چنین باشد.

 ۳/ اشاره: بخش عمده‌ای از ریاضیات مدرن با اختیار کردن مجموعه‌ای از اصول موضوع و دیدن اینکه چه قضیه‌هایی می‌توانند با استفاده از آنها اثبات شوند، کار می‌کنند — یا گاهی با اختراع اصول موضوع جدید. اصول موضوع را فرض بگیرید تا قضا یا را اثبات کنید.

نیز ← ۷. نظریه‌ی مجموعه‌ها ۱۳. رده‌ها ۱۴. اعداد طبیعی